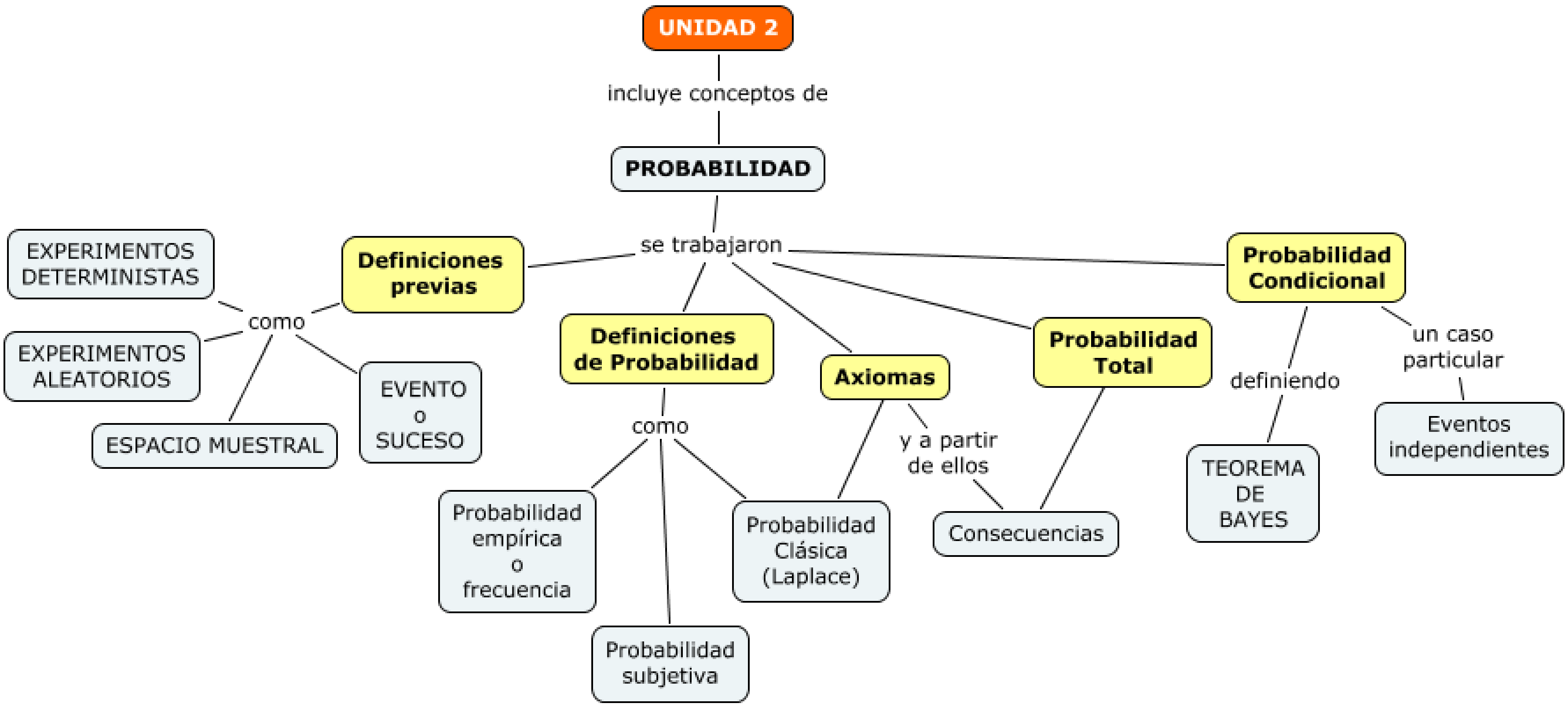
PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA I

UNIDAD Nº2

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática
Mg. Lucía C. Sacco

Unidad Nº2


UNIDAD 2
incluye conceptos de
PROBABILIDAD
se trabajaron
Definiciones previas
como
EXPERIMENTOS DETERMINISTAS
EXPERIMENTOS ALEATORIOS
ESPACIO MUESTRAL
EVENTO o SUCESO
Definiciones de Probabilidad
como
Probabilidad empírica o frecuencia
Probabilidad subjetiva
Probabilidad Clásica (Laplace)
Axiomas
y a partir de ellos
Consecuencias
Probabilidad Total
Probabilidad Condicional
definiendo
TEOREMA DE BAYES
un caso particular
Eventos independientes

<u>Unidad Nº2:</u> Introducción a la probabilidad. Espacios muestrales finitos. Probabilidad condicional.

- ❑ Modelos matemáticos. Modelos determinísticos versus métodos probabilísticos o aleatorios. Conceptos básicos de probabilidad: espacio muestral, sucesos. Probabilidad empírica o frecuencial.

- ❑ Probabilidad de ocurrencia de un suceso. Definición clásica de probabilidad y sus limitaciones. El modelo hipergeométrico. Definición axiomática de probabilidad. Consecuencias de los axiomas. Teoremas básicos.

- ❑ Espacios muestrales finitos. Resultados igualmente probables. Métodos de enumeración: principio de multiplicación, principio de adición, permutaciones, combinaciones, permutaciones cuando no todos los objetos son diferentes.

- ❑ Probabilidad condicional. Teorema de las probabilidades totales. Teorema de Bayes. Sucesos independientes. Probabilidad condicional e independencia.

Problemas Históricos

Caballero de Meré a Pascal

Al lanzar 2 dados, ¿cuántos lanzamientos son necesarios para tener una probabilidad no menor de 0.5, de conseguir al menos un doble seis?

Galileo

Si se lanzan 3 dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea, respectivamente 9, 10, 11 ó 12?

Experimentos

¿Qué ocurrirá si experimentamos poniendo agua en un recipiente y calentándola hasta 100ºC?

¿Qué ocurrirá si suelto un vaso que tengo en la mano?

Experimento determinista

Si arrojo un dado, ¿qué número aparecerá en la cara superior?

Si seleccionamos al azar una ficha del archivo de participantes del curso a distancia, ¿cuál será la profesión de la persona seleccionada?

Si tiramos una moneda, ¿cuántas veces debemos arrojarla hasta que salga cara?

Experimento aleatorio

Probabilidades

Teoría de las Probabilidades

Básicamente, existen tres teorías bien conocidas para **medir la probabilidad** y trataremos de dar una idea somera de ellas por medio de los ejemplos planteados en los experimentos aleatorios:

- Cuando arrojamos el dado y queremos calcular, por ejemplo, la probabilidad que salga un tres, utilizaremos la denominada **teoría clásica de la probabilidad.**

- Cuando seleccionamos fichas de inscripción al curso, para medir la probabilidad utilizaremos la **teoría frecuencial**, donde la probabilidad se mide utilizando la frecuencia relativa de ocurrencia de un evento.

- Existirán también situaciones en las que, para cuantificar la probabilidad de cierto desarrollo futuro de los acontecimientos, se debe recurrir a la subjetividad del investigador dando así una **medida de probabilidad de tipo subjetivo**.

Espacio muestral y evento

Un evento aleatorio, es un resultado de un experimento aleatorio

Un experimento aleatorio es una operación realizada un cierto número de veces, bajo las mismas condiciones de experimentación.
Un resultado no puede preverse cuando se realiza una sola vez pero, si se repite un número grande de veces, los resultados del experimento responderán a una ley de comportamiento regular y previsible.

Ejemplo 1
En muchos juegos de naipes se utiliza una baraja de 52 cartas; dividida en dos colores: rojo y negro, y cuatro palos: corazón, diamante, trébol y pique. Dentro de cada palo hay 13 cartas: 1, 2, 3, ... 10, J, Q, K.

Ejemplo 2
Tirar una moneda al aire y obtener cara, extraer un trébol de un mazo de naipes son ejemplos de eventos aleatorios.

Probabilidad clásica

La probabilidad de un suceso es igual al cociente entre el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles, siempre y cuando todos los resultados tengan igual posibilidad de ocurrir.

Es importante destacar, en este punto, que la teoría clásica no se aplica únicamente a los juegos de azar sino que toda la teoría del muestreo de poblaciones finitas, está basada en la versión Laplaciana de la probabilidad, versión actualmente modificada o enriquecida por el enfoque Neo Bayesiano.

Ejemplo 3

Un bolillero contiene 20 bolillas numeradas de 1 a 20. Si se elige al azar una bolilla, ¿cuál es la probabilidad de que el número de la bolilla elegida sea divisible por 3?

Probabilidad frecuencial

Hay situaciones en las cuales no se puede aplicar la noción de un número definido de casos igualmente probables.

Podemos asociar un número P(A) como probabilidad de cada evento A surgido por medio de la realización de un experimento aleatorio E, de manera tal que , será aproximadamente igual a P(A) si se considera una larga serie de repeticiones del experimento

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{f_a(A)}{n}$$

La ley de comportamiento de los fenómenos aleatorios surge de la distribución de frecuencias con que se presentan

Probabilidad subjetiva

Se refiere a la probabilidad de ocurrencia de un suceso basado en la experiencia previa, la opinión personal o la intuición del individuo. En este caso después de estudiar la información disponible, se asigna un valor de probabilidad a los sucesos basado en el grado de creencia de que el suceso pueda ocurrir.

Ejemplo 4

Si una moneda no es perfecta, la probabilidad de obtener cara al lanzarla, no es 1/2, debido a que los dos resultados posibles no son igualmente probables.

Ejemplo 5

Podemos suponer que cierta empresa tiene un archivo con todos los reclamos de garantía efectuados por los clientes durante un año. Se decide tomar una muestra de n = 70 reclamos y clasificarlos por categoría de defectos. (Partimos de suponer que cada reclamo de garantía contempla una y sólo una de las categorías de defectos).

La extracción de los reclamos puede ser considerada un experimento aleatorio pues el resultado individual registrado en cada ficha no puede predecirse hasta que la misma sea seleccionada y leída. Este experimento aleatorio se repite un número n = 70 veces bajo condiciones uniformes. Los resultados obtenidos se resumen en la siguiente tabla:

Categoría de defecto	Cantidad de reclamos (n_i)	Frecuencia relativa (h_i)
Menor	38	0,543
Apenas serio	20	0,286
Serio	8	0,114
Mayor	4	0,057
Total	**70**	**1,000**

Axiomas de Probabilidad

En 1993, el enfoque axiomático de la probabilidad fue formalizado por el matemático ruso A. N. Kolmogorov. La base de este enfoque está formalizada en tres axiomas, en las que la probabilidad de un evento A en el experimento aleatorio E, es el valor numérico P(A) que satisface los mismos:

Primer axioma

1) Si A es un evento, luego $P(A) \geq 0$ para todo A

Segundo axioma

2) Si S representa al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio (espacio muestral), luego $P(S) = 1$

Tercer axioma

3) $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$ si $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión finita o infinita de eventos incompatibles o excluyentes.

Ejemplo 6

Supongamos que un experimento aleatorio consiste en tirar un dado perfecto, sólo una vez.

Consecuencias de los axiomas

Antes vamos a presentar y a explicar, cuatro consecuencias importantes que se desprenden de los tres axiomas enunciados:

1) $P(\varphi) = 0$ (φ es un evento imposible)

2) $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ ($\overline{A}$ es el evento complemento de A)

3) $0 \leq P(A) \leq 1$ cualquiera sea el evento A

4) $P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2) - P(A1 \cap A2)$ cualesquiera sean A1 y A2

Ejemplo 7

Continuando con el Ejemplo 6 calcular:

a. La probabilidad de obtener 7.
b. Si sale 1 al tirar un dado, cual es la probabilidad de que esto no ocurra.
c. Entre qué valores varían las probabilidades obtenidas.

Ejemplo 8

Supongamos que en una muestra de 30 niños se obtuvieron los siguientes resultados referidos a peso y altura.

a) Calcular la probabilidad de que un niño de esta muestra sea alto o flaco.

b) Calcular la probabilidad de que un niño sea a la vez gordo y alto.

c) Considerando únicamente la variable peso, ¿Cuál es la probabilidad de que sea alto, siendo flaco?

d) Calcular la probabilidad de que un niño sea gordo condicionado al hecho de saber que es alto.

	Alto (B_1)	Bajo (B_2)	Total	
Gordo (A_1)	12	6	18	Submuestra 1
Flaco (A_2)	8	4	12	Submuestra 2
Total	**20**	**10**	**30**	
	Submuestra 1	Submuestra 2		

Probabilidad condicional

Primera Situación

Una primera situación es la que se plantea cuando simplemente debemos calcular la **probabilidad de la aparición conjunta de dos eventos.**

Segunda Situación

Considerando únicamente la variable peso, es posible dividir la muestra de 30 niños en dos submuestras: niños gordos y niños flacos.

Tercera Situación

Razonando de la misma manera, podríamos pensar:

- Calcular la probabilidad de que un niño sea gordo condicionado al hecho de saber que es alto.

En síntesis:

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Eventos independientes

Ejemplo 9

Treinta y cinco hombres de una muestra, se clasificaron de acuerdo a sus hábitos de fumar y considerando si tienen o no frecuentes dolores de cabeza.

Los resultados obtenidos fueron:

	Fuman (A_1)	No fuman (A_2)	Total
Con frecuentes dolores (B_1)	12	8	20
Sin frecuentes dolores (B_2)	9	6	15
Total	**21**	**14**	**35**

Si B es independiente de A también A será independiente de B. Por lo tanto, **los eventos A y B son independientes si se cumple:**

- $P(B/A) = P(B/\overline{A}) = P(B)$
- $P(A/B) = P(A/\overline{B}) = P(A)$

Cuando hablamos de probabilidad condicional, dijimos que $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

entonces, si A y B son independientes, o sea que P(B/A) = P(B) , se tiene:

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

De la ecuación anterior se deduce que: $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

Luego, otra definición de independencia puede expresarse como:

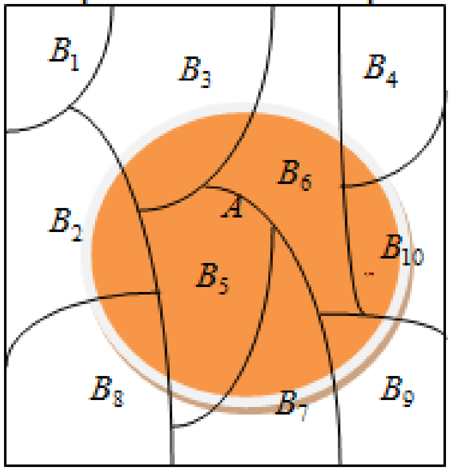
Los eventos A y B son independientes si se cumple que:

$$P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B)$$

Definición previa

6.1 Partición

Decimos que los sucesos B1, B2, B3,....., Bk representan una partición del espacio muestral S si:



(a) $B_i \neq B_j$ para todo $i \neq j$

(b) $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$ (S espacio muestral)

(c) $P(B_i) > 0$ para todo i

En otras palabras: cuando se efectúa el experimento E ocurre uno y solo uno de los sucesos B_i.

Ejemplo 10

En el lanzamiento de un dado $B_1 = \{1,2\}$, $B_2 = \{3,4,5\}$ y $B_3 = \{6\}$ representan una partición del espacio muestral, mientras que $C_1 = \{1,2,3,4\}$ y $C_2 = \{4,5,6\}$ no lo es.

Teorema de la Probabilidad Total

Sea A algún suceso con respecto a S y sea B_1, B_2,....., B_k una partición de S, algunos de los conjuntos $A \cap B_i$ pueden ser vacíos, esto no invalida la anterior descomposición de A.

Por lo tanto, es posible aplicar la propiedad aditiva para este tipo de sucesos $P(A)=1$ y escribir:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_k)$$

Sin embargo, cada término $P(A \cap B_j) = P(A/B_j) \,.\, P(B_j)$ y por lo tanto, obtenemos el llamado *teorema de la probabilidad total:*

$$\boxed{P(A) = P(A/B_1) \,.\, P(B_1) + P(A/B_2) \,.\, P(B_2) + \ldots + P(A/B_k) \,.\, P(B_k)}$$

Este resultado representa una relación muy útil, ya que frecuentemente cuando se busca P(A) puede ser difícil calcularlo directamente. Sin embargo, con la información adicional de que B_j ha ocurrido, podemos calcular cada $P(A/B_j)$ y entonces usar la fórmula anterior.

Teorema de Bayes

Siendo B_i una partición del espacio muestral, uno y solo uno de los sucesos B_i sucede.

Por lo tanto, para calcular la probabilidad de un B_i particular (esto es una "causa"), dado que el suceso A ha ocurrido, se aplica la definición de probabilidad condicional, se obtiene:

$$P(B_i / A) = \frac{P(A / B_i) \, . \, P(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A / B_j) \, . \, P(B_j)} \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

Este resultado se lo conoce como **Teorema de Bayes** o Teorema para la probabilidad de las "causas".

Ejemplo 11

El 20% de los alumnos de una Facultad son de Rosario y otro 20% son de Pergamino, el resto son de San Nicolás. El 75% de los alumnos de Rosario cursan el ciclo superior y el 50% de los de Pergamino también, mientras que de los de San Nicolás solamente el 20% cursan el ciclo superior. ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno del ciclo superior elegido al azar sea de Rosario?

Actividad próximo encuentro:

Resolver las

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

(archivo adjunto "Actividades – UNIDAD Nº2)

No son para entregar. Son para realizar la revisión de lo trabajado en el segundo encuentro